On pose, pour tout le problème : $I_{-1} =]-\infty, -1[$, $I_0 =]-1,1[$, $I_1 =]1, +\infty[$.

Mathématiquement, le sujet consiste en la recherche des valeurs propres d'un opérateur différentiel, $D : E \longrightarrow E'$ $y(\cdot) \longmapsto y''(\cdot) - U(\cdot)y(\cdot)$ avec $E = \left\{ y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(I_1) \cap \mathcal{C}^2(I_0) \cap \mathcal{C}^2(I_1) \,/\, \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x)\,dx \text{ CV} \right\}$; le but étant de montrer qu'elles sont en nombre fini.

en un sens quelque peu étendu, car D n'est pas un endomorphisme : $E' \neq E$!!

On est donc amené à considérer les équations différentielles :

$$y'' - (\lambda + H)\,y = 0 \text{ sur } I_1, I_{-1} \qquad y'' - \lambda y = 0 \text{ sur } I_0$$

et c'est donc fort logiquement que s'organise le problème autour de la discussion du type des solutions, suivant les signes de λ et $\lambda + H$, dans les parties I à V. VI fait la synthèse des résultats, et en VII un exemple particulier est traité jusqu'à la détermination complète des espaces propres.

ce qui, en comptant les cas limites, produit 5 cas – donc 5 parties ! – en comparant λ à 0 et $-H$.

O

1/ $F(t) = \int_1^t (ae^{\omega x} + be^{-\omega x})^2\,dx = \int_1^t (a^2e^{2\omega x} + 2ab + b^2e^{-2\omega x})\,dx$

qu'on intègre " à vue ".

$$\boxed{F(t) = \frac{a^2}{2\omega}(e^{2\omega t} - e^{2\omega}) + 2ab(t-1) + \frac{b^2}{2\omega}(e^{-2\omega} - e^{-2\omega t})}$$

Si $a \neq 0$, $F(t) \underset{\infty}{\sim} \frac{a^2}{2\omega} e^{2\omega t} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} F(t) = +\infty$. $a = 0$ est donc une CN de CV.

Réciproquement, $a = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} F(t) = \frac{b^2}{2\omega}e^{-2\omega}$.

par mise en facteur ; $\lim_{t\to\infty} te^{-2\omega t} = 0$.

$$\boxed{\int_1^{+\infty} (ae^{\omega x} + be^{-\omega x})^2\,dx \text{ CV} \iff a = 0}$$

2/ $G(t) = \int_1^t (a\cos\omega x + b\sin\omega x)^2\,dx = \int_1^t (a^2\cos^2\omega x + 2ab\cos\omega x\sin\omega x + b^2\sin^2\omega x)\,dx$

$= \int_1^t \left\{ \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2\omega x + ab\sin 2\omega x \right\} dx$

On linéarise et on regroupe !

$$\boxed{G(t) = \frac{a^2+b^2}{2}(t-1) + \frac{a^2-b^2}{4\omega}(\sin 2\omega t - \sin 2\omega) + \frac{ab}{2\omega}(\cos 2\omega - \cos 2\omega t)}$$

Si $a^2+b^2 \neq 0$, $G(t) \underset{\infty}{\sim} \frac{a^2+b^2}{2}t$; l'intégrale divergera. Donc il faut $a = b = 0$; réc. évidente.

$\frac{|\sin 2\omega t|}{t} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\sin 2\omega t}{t} = 0$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} (a\cos\omega x + b\sin\omega x)^2\,dx \text{ CV} \iff a = b = 0}$$

3/ Observant que $\int_{-t}^{-1} (ae^{\omega x} + be^{-\omega x})^2\,dx = \int_1^t (ae^{-\omega y} + be^{\omega y})\,dy$, on constate que l'étude du problème revient à changer ω en $-\omega$. Idem dans la 2ème !

changement de variable $x = -y$, trivialement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,t]$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-1} (ae^{\omega x} + be^{-\omega x})^2\,dx \text{ CV} \iff b = 0 ;\ \int_{-\infty}^{-1} (a\cos\omega x + b\sin\omega x)^2\,dx \text{ CV} \iff a = b = 0}$$

I

* Sur I_1 et I_{-1} : $y'' - (\lambda+H)\,y = 0 \iff y = y_1 = a_1e^{\beta x} + b_1e^{-\beta x}$ sur I_1
  $y = y_{-1} = a_{-1}e^{\beta x} + b_{-1}e^{-\beta x}$ sur I

$\lambda + H > 0$, $\lambda + H = \beta^2$

Sur I_0 : $y'' - \lambda y = 0 \iff y = y_0 = a_0e^{\alpha x} + b_0e^{-\alpha x}$ sur I_0

$\lambda > 0$, $\lambda = \alpha^2$

* D'après 0 1/ & 3/, les CV demandées exigent $a_1 = 0$, $b_{-1} = 0$. (C.N. !)
* Il reste donc à savoir si l'on peut trouver des constantes non triviales t.q. $\{ y = b_1e^{-\beta x}$ sur I_1 ; $y = a_0e^{\alpha x} + b_0e^{-\alpha x}$ sur I_0 ; $y = a_{-1}e^{\beta x}$ sur I_{-1} soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

À NOTER : des notations "bien coordonnées" facilitent toujours le travail !

* continuité en 1 : y continue en $1 \iff \lim_{x\uparrow 1} y(x) = \lim_{x\downarrow 1} y(x)$

$\iff y_0(1) = y_1(1)$

$\iff \underline{a_0e^{\alpha} + b_0e^{-\alpha} = b_1e^{-\beta}} \qquad (C_1)$

De même, en -1 : y continue en $-1 \iff \underline{a_0e^{-\alpha} + b_0e^{\alpha} = a_{-1}e^{-\beta}} \qquad (C_{-1})$

considérant y_0 & y_1 comme les formules, elles sont définies sur les FERMÉS $[-1,1]$ et $[1,+\infty[$ et continues à G (resp. à D) en 1.

* dérivée en 1 :

Si (C_1) est vérifiée $\begin{cases} y = y_1 \text{ sur } [1,+\infty[\ , \text{ donc } y \text{ est dérivable à Droite: } y'_D(1) = y'_1(1) \\ y = y_0 \text{ sur } [-1,1]\ , \text{ " } y \text{ " " " Gauche } y'_G(1) = y'_0(1) \end{cases}$

Donc y est dérivable en 1 ssi $y'_D(1) = y'_G(1) \iff y'_1(1) = y'_0(1)$

$$\iff a_0\alpha e^{\alpha} - b_0\alpha e^{-\alpha} = -\beta b_1 e^{-\beta} \quad (D_1)$$

la classe $\mathcal{C}^1$ suit alors automatiquement, car $y_1 \in \mathcal{C}^1(I_1)$, $y_0 \in \mathcal{C}^1(I_0)$

De même, en -1, $y \in \mathcal{C}^1(I_{-1} \cup I_0) \iff a_0\alpha e^{-\alpha} - b_0\alpha e^{\alpha} = \beta a_{-1} e^{-\beta} \quad (D_{-1})$

Finalement, $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \iff \{(C_1),(D_1),(C_{-1}),(D_{-1})\} \quad (\mathcal{S})$

et il n'y a donc plus qu'à examiner si ce système possède une solution non nulle.

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} (C_1) & a_0 e^{\alpha} + b_0 e^{-\alpha} = b_1 e^{-\beta} \\ (D_1) & a_0 e^{\alpha} - b_0 e^{-\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} b_1 e^{-\beta} \\ (C_{-1}) & a_0 e^{-\alpha} + b_0 e^{\alpha} = a_{-1} e^{-\beta} \\ (D_{-1}) & a_0 e^{-\alpha} - b_0 e^{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} a_{-1} e^{-\beta} \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 e^{\alpha} = \frac{b_1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\beta} \\ b_0 e^{-\alpha} = \frac{b_1}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\beta} \\ a_0 e^{-\alpha} = \frac{a_{-1}}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\beta} \\ b_0 e^{\alpha} = \frac{a_{-1}}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\beta} \end{cases}$$

en résolvant chacun des deux sous systèmes par demi-somme, demi-différence

$$\iff \begin{cases} a_0 e^{\alpha} = \dots \\ b_0 e^{-\alpha} = \dots \end{cases} \text{ ET } \begin{cases} b_1\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) - a_{-1}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{2\alpha} = 0 \\ b_1\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - a_{-1}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-2\alpha} = 0 \end{cases} \quad (C.C)$$

Or $(C.C) \iff \begin{cases} b_1 = -a_{-1} \cdot \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} e^{2\alpha} = -a_{-1} k, & k > 1 \quad (\text{car } \beta > \alpha > 0) \\ b_1 = -a_{-1} \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} e^{-2\alpha} = -a_{-1} \cdot \frac{1}{k} & \Downarrow\ \frac{1}{k} < 1 \end{cases}$

d'où si $a_{-1} \neq 0$, $|b_1| > |a_{-1}|$ et $|b_1| < |a_{-1}|$, ce qui est impossible.

Donc $a_{-1} = 0$, d'où $b_1 = 0$, et par report $a_0 = b_0 = 0$.

Il n'y a pas de niveaux $\lambda > 0$

Par (C_1) les deux définitions en 1 se recollent; et chacune assure la classe de son côté!

CONSEIL POUR LES RACCORDS: penser aux dérivées à D et à G, bien plus légères que les taux d'acc^{ts}!

schéma de raisonnement que nous utiliserons dans TOUTE la suite, mais sans le redétailler: une fois TRÈS soigneusement, c'est nécessaire ... et suffisant!

deux premières conservées, et conditions de compatibilité.

La moins mauvaise façon de s'y prendre en pareilles circonstances reste de respecter la symétrie "du système", d'essayer de progresser de façon bien parallèle ... observer qu'on n'a jamais travaillé autre chose que des systèmes 2×2!

II

Sur I_1 et I_{-1}, pas de changement: $y = b_1 e^{-\beta x}$ sur I_1 (avec cond. de CV)

$y = a_{-1} e^{\beta x}$ sur I_{-1} (" " ")

Sur I_0, $\lambda = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, $y = y_0 = a_0 x + b_0$ en intégrant $y'' = 0$.

Alors: $\begin{cases} (C_1) & b_1 e^{-\beta} = a_0 + b_0 \\ (D_1) & -\beta b_1 e^{-\beta} = a_0 \end{cases}$ et $\begin{cases} (C_{-1}) & a_{-1} e^{-\beta} = -a_0 + b_0 \\ (D_{-1}) & \beta a_{-1} e^{-\beta} = a_0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b_0 = (1+\beta) b_1 e^{-\beta} = (1+\beta) a_{-1} e^{-\beta} \\ a_0 = -\beta b_1 e^{-\beta} = \beta a_{-1} e^{-\beta} \end{cases}$ par différence dans chaque

$\iff \begin{cases} b = \dots \\ a_0 = \dots \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1 = a_{-1} & \text{car } 1+\beta \neq 0 \\ -b_1 = a_{-1} & \text{" } \beta \neq 0 \end{cases}$ d'où $b_1 = a_{-1} = 0$ puis $b_0 = a_0 = 0$.

0 n'est pas un niveau

On commence à recueillir ici le fruit de nos bons soins:

- raisonnement déjà explicité;
- adaptation immédiate grâce au bon choix des notations!

III

Sur I_1 et I_{-1}, puisque $\lambda + H = 0$: $y = a_1 x + b_1$ sur I_1

$y = a_{-1} x + b_{-1}$ " I_{-1}.

Sur I_0, avec $-H = \alpha^2$ $\quad y = y_0 = a_0 \cos \alpha x + b_0 \sin \alpha x$

Mais $\int_1^t (ax+b)^2\,dx = \frac{a}{2}(t^2-1) + b(t-1)$, de sorte que la condition de CV impose de manière évidente $a = b = 0$. On aura donc ici $a_1 = b_1 = a_{-1} = b_{-1} = 0$

Alors $\begin{cases} (C_1) & a_0 \cos\alpha + b_0 \sin\alpha = 0 \\ (D_1) & -a_0 \sin\alpha + b_0 \cos\alpha = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix} \right. \Rightarrow a_0 = b_0 = 0$

Inutile, bien sûr, de se préoccuper de (C_{-1}) et (D_{-1}) ... C'est le COURS, rappelé ci-contre, qui nous a fait choisir, de manière privilégiée, ces deux équations là comme C.N. "intéressante". Comme quoi les grands théorèmes servent AUSSI dans les petites circonstances!

$-H$ n'est pas un niveau

cohérent avec le COURS sur les e.d:

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

a une solution UNIQUE sur $\mathbb{R}$. Et comme $y \equiv 0$ est solution évidente...

IV

Sur I_1 et I_{-1}, avec $\lambda+H=-\beta^2$ $\quad y=y_1=a_1\cos\beta x+b_1\sin\beta x$ sur I_1

$y=y_{-1}=a_{-1}\cos\beta x+b_{-1}\sin\beta x$ sur I_{-1}

Sur I_0, avec $\lambda=-\alpha^2$ $\quad y=y_0=a_0\cos\alpha x+b_0\sin\alpha x$ sur I_0

Mais les conditions de CV imposent $a_1=b_1=a_{-1}=b_{-1}=0$. d'après 0, 2/ et 3/

Ce qui ramène ... au même cadre de travail que III, d'où l'on conclut :

$\boxed{\text{Il n'y a pas de niveaux } \lambda<-H}$

V

1/ Sur I_1 et I_{-1}, $y''-\beta^2y=0$ d'où $y_1=a_1e^{\beta x}+b_1e^{-\beta x}$, $y_{-1}=a_{-1}e^{\beta x}+b_{-1}e^{-\beta x}$

Sur I_0, $y''+\alpha^2y=0$ " $y_0=a_0\cos\alpha x+b_0\sin\alpha x$.

Joignons y les conditions de convergence déjà rencontrées et nous aurons :

$\boxed{y(x)=a_{-1}e^{\beta x} \text{ sur } I_{-1}\,;\ y(x)=a_0\cos\alpha x+b_0\sin\alpha x \text{ sur } I_0\,;\ y(x)=b_1e^{-\beta x} \text{ sur } I_1}$

2/ $\begin{cases} a_0\cos\alpha+b_0\sin\alpha = b_1e^{-\beta} & (C_1)\\ -a_0\sin\alpha+b_0\cos\alpha=-\frac{\beta}{\alpha}b_1e^{-\beta} & (D_1)\end{cases}$ et $\begin{cases} a_0\cos\alpha-b_0\sin\alpha = a_{-1}e^{-\beta} & (C_{-1})\\ a_0\sin\alpha+b_0\cos\alpha=\frac{\beta}{\alpha}a_{-1}e^{-\beta} & (D_{-1})\end{cases}$

On a divisé par α (D_1) et (D_{-1}) pour avoir des systèmes "agréables" !

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{b_1=e^{\beta}(a_0\cos\alpha+b_0\sin\alpha) \qquad a_{-1}=e^{\beta}(a_0\cos\alpha-b_0\sin\alpha)} \\ a_0\cos\alpha+b_0\sin\alpha=\frac{\alpha}{\beta}(a_0\sin\alpha-b_0\cos\alpha) \quad (1)\\ a_0\cos\alpha-b_0\sin\alpha=\frac{\alpha}{\beta}(a_0\sin\alpha+b_0\cos\alpha) \quad (2)\end{cases}$

compatibilité des 2 expressions de b_1

" " " " " a_{-1}

Il est en outre clair que $a_0^2+b_0^2\neq0$ pour un niveau, sinon $b_1=a_{-1}=0$ (et $a_0=b_0=0$)

3/ a) $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0\cos\alpha=\frac{\alpha}{\beta}a_0\sin\alpha \\ b_0\sin\alpha=-\frac{\alpha}{\beta}b_0\cos\alpha\end{cases}$

encore par demi-somme ...

... et demi-différence !

$\Longleftrightarrow$
① $a_0=0$ et $\sin\alpha=-\frac{\alpha}{\beta}\cos\alpha$ (car alors, néc^t $b_0\neq0$) ;
ou
② $b_0=0$ et $\cos\alpha=\frac{\alpha}{\beta}\sin\alpha$ (" " " $a_0\neq$) ;
ou
③ $a_0\neq0$, $b_0\neq0$, $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\alpha}{\beta}\sin\alpha\\ \sin\alpha=-\frac{\alpha}{\beta}\cos\alpha\end{cases}$

Dans ce dernier cas $1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{\alpha^2}{\beta^2}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\frac{\alpha^2}{\beta^2} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=1$ $\quad$ $\alpha>0$ et $\beta>0$ par construction

alors, par report, on devrait avoir $\cos\alpha=\sin\alpha=-\cos\alpha$

soit $\cos\alpha=0$ et $\cos\alpha=\sin\alpha$, ce qui est impossible : ③ est exclu !

$\boxed{\lambda \text{ niveau} \Longleftrightarrow ① \begin{cases}a_0=0\\ \beta=-\alpha\,\mathrm{cotg}\,\alpha\\ \alpha\in\,]k\pi+\frac{\pi}{2},(k+1)\pi[\,=J_k\end{cases} \text{ ou } ② \begin{cases}b_0=0\\ \beta=\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\\ \beta\in\,]k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}[\,=I_k\end{cases}}$

Si $\cos\alpha=0$, on tire par (1) et (2) $a_0=b_0=0$ successivement. De même si $\sin\alpha=0$: Donc λ niveau $\Rightarrow \cos\alpha\sin\alpha\neq0$ ce qui répond par anticipation à 4a/ mais surtout permet d'utiliser tg et cotg !

En effet $\alpha>0$ et $\beta>0$ fournissent, de plus, une CN évidente sur les intervalles où doit se trouver α, ce qui "prépare" l'arrivée des I_k et J_k ... et introduit très naturellement la distinction des niveaux en 2 catégories !

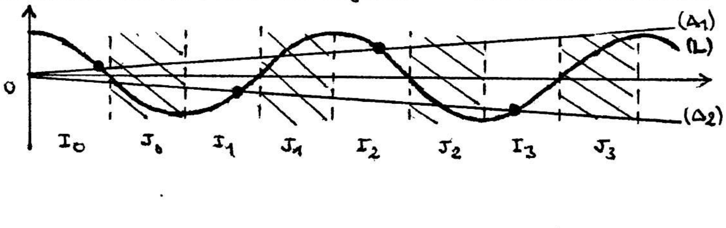
b) Les niveaux de 1ère catégorie correspondent alors à ②

$\begin{cases}\beta=\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha & \alpha\in I_k\\ \beta^2=H+\lambda=H-\alpha^2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\beta=\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha, \ \alpha\in I_k\\ \alpha^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=H \Longleftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{\alpha^2}{H}.\end{cases}$

soit l'équation en α : $\boxed{\cos^2\alpha-\frac{\alpha^2}{H}=0\,,\ \alpha\in E=\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k}$

c) Les α solutions sont donc les points d'intersection de (L) $y=\cos\alpha$ avec (Δ_1) $y=\alpha/\sqrt{H}$ ou (Δ_2) $y=-\alpha/\sqrt{H}$, situés dans E

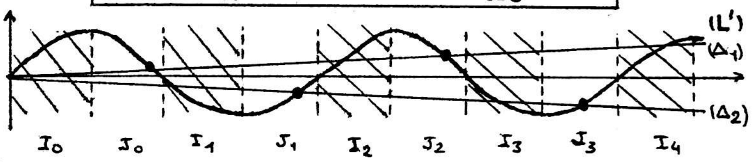
plus précisément, leurs abscisses !



4/ On obtient, de même, les niveaux de 2^e catégorie avec (1)

$\begin{cases} \beta = -\alpha \cotg \alpha & \alpha \in J_k \\ \beta^2 = H - \alpha^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\alpha \cotg \alpha & \alpha \in J_k \\ \alpha^2(1+\cotg^2 \alpha) = H \end{cases}$ On obtient de même :

$$\boxed{\sin^2 \alpha - \frac{\alpha^2}{H} = 0 \quad , \alpha \in F = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k}$$



les solutions sont les intersections avec (Δ_1) et (Δ_2) de (L') : $y = \sin \alpha$, situées dans F.

Précision sur l'énoncé : Chercher $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ serait ILLUSOIRE ! En effet, exploitant les équadiffs, on aurait en 1 :
$y''(1) = \begin{cases} y_1''(1) = (\lambda+H)\, y(1) \\ y_0''(1) = \lambda \quad y(1) \end{cases}$
$\Rightarrow y(1) = 0 \Rightarrow b_1 = 0$
De même, en -1, on trouverait $a_{-1} = 0$, d'où $a_0 = b_0 = 0$ par (C_1) et (D_1)
Le problème n'aurait JAMAIS de sol. !

VI

Préalable : étude de l'équation $\cos \alpha - \frac{\alpha}{\sqrt{H}} = 0$, $\alpha \in E$.

* Comme $\alpha > 0$, cette équation ne peut avoir de racines que dans I_{2k} (dans I_{2k+1}, $\cos \alpha < 0$)
* Or sur I_{2k}, $\alpha \mapsto \cos \alpha$ décroît, $\alpha \mapsto -\frac{\alpha}{\sqrt{H}}$ donc $\alpha \mapsto \varphi(\alpha) = \cos \alpha - \frac{\alpha}{\sqrt{H}}$ est décroissante ; l'équation a donc au plus une racine.
* Sur I_{2k}, φ est continue ; $\varphi(2k\pi) = 1 - \frac{2k\pi}{\sqrt{H}}$ et $\varphi(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{H}}(2k\pi + \frac{\pi}{2})$ (cette 2^{eme} valeur est toujours négative)

donc : si $2k\pi > \sqrt{H}$, il n'y a pas de solution ;

si $2k\pi \leq \sqrt{H}$, $\varphi(2k\pi) \geq 0$, l'équation a au moins une racine ; (théorème des valeurs intermédiaires)

soit une exactement en joignant au point précédent. En résumé :

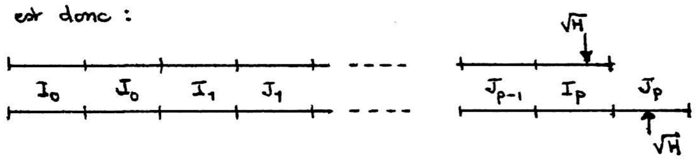
$$\boxed{(L) \cap (\Delta_1) \text{ comporte un point par intervalle } I_{2k} \,/\, 2k \leq \frac{\sqrt{H}}{\pi}}$$

De même $(L) \cap (\Delta_2)$ a un point et un seul par I_{2k+1} / $2k+1 \leq \sqrt{H}/\pi$; les niveaux de première catégorie sont en même nombre que les I_ℓ / $\ell \leq \sqrt{H}/\pi$.

Un raisonnement similaire montre que le nombre de niveaux de deuxième catégorie est le nombre d'intervalles J_ℓ / $\ell\pi + \frac{\pi}{2} \leq \sqrt{H} \iff (2\ell+1) \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{H}$.

Aucune raison de parachuter ce paramètre ! On l'a donc laissé arriver logiquement, à son heure...

La situation est donc :



Il n'y a plus qu'à compter les intervalles ! (et, si possible, à ne pas se tromper : on commence à 0, on compte le dernier ... et bonne chance à tous !)

	n =	1ère	2ème	TOTAL
1/	2p	p+1	p	2p+1
2/	2p+1	p+1	p+1	2p+

D'où la réponse à 3/ :

$$\boxed{\text{Il y a } n+1 \text{ niveaux}}$$

VII

1/ $H = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow 0 < \frac{2}{\pi}\sqrt{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1$ $\quad n = 0$, d'après VI il y a un niveau et un seul. (et il est de 1^{ere} catégorie !)

Or $\cos \alpha = \frac{\alpha}{\pi} . 2\sqrt{2}$ possède la racine évidente $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{H = \frac{\pi^2}{8}. \text{ Il y a un seul niveau, } \lambda = -\frac{\pi^2}{16}}$$

C'est du "fait pour" !! Ça fait plaisir en fin de problème ; en général on n'échappera pas à une méthode numérique itérative ...

2/ $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = 1 . \frac{\pi}{4}$ et $b_0 = 0$ (1^{ere} espèce.) On choisit $a_0 = 1$ et on renormalisera ensuite : par II il vient $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi/4}$, $a_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi/4}$, d'où une fonction propre :

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}(1+x)} & \text{sur } I_{-1} \\ \cos \frac{\pi}{4} x & \text{" } I_0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}(1-x)} & \text{" } I_1 \end{cases}}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx = \left(1 + \frac{4}{\pi}\right)$ SGDG !

$$\boxed{\hat{y}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4/\pi}}\, y(x)}$$

$\int_0^1 \cos^2 \frac{\pi}{4} x \, dx = \int_0^1 \frac{1 + \cos \frac{\pi}{2} x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$

$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}x} dx = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2}}$