Nabla est-il vicieux ?

Alain Juhel

Au village, sans prétention
J'ai mauvaise réputation
Qu' je m'démène ou qu'je reste coi
Je pass' pour un je ne sais quoi.

— Georges Brassens

Je suis choqué quand je vois ma fille, qui est en prépa, apprendre deux sortes de Mathématiques, les Mathématiques pour les Mathématiques, et les Mathématiques pour la Physique…

— J.-J. Duby
Directeur scientifique d'IBM Europe

Résumé

Le symbole $\vec{\nabla}$, d'un usage fréquent en physique pour rendre plus commodes les calculs d'analyse vectorielle, a souvent pour qui l'emploie les traits redoutables des serviteurs à la fois indispensables et gênants : indispensables par l'efficacité, mais gênant, non pas tant par la difficulté d'en donner une définition mathématique cohérente et accessible, que par la réputation de « ne pas marcher à tous les coups ». Le pire est bien sûr le caractère particulièrement flou de la frontière, irritant par la suspicion permanente qui pèse sur les calculs, et le paradoxe que, dans le doute, on l'écarte là où il pourrait faire gagner le plus de temps !

Sans prétendre à l'exhaustivité, on se propose ici de montrer que *ça ne marche pas si mal que ça*, sur deux exemples classiques de « problèmes ». À la condition — minime — de savoir un tout petit peu ce que l'on fait… au lieu de manipuler aveuglément un réputé **pseudo**-vecteur comme un vecteur ordinaire. Après tout, s'il n'a pas volé ces qualificatifs, autant savoir pourquoi, non ?

1 Deux problèmes exemplaires

À partir de la classique formule :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{k}} \tag{1}$$

on note, dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}} \tag{2}$$

de manière à pouvoir lire :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \vec{\nabla} V \tag{3}$$

Ayant effectué le classique calcul dans l'habituel repère des coordonnées cylindriques $\left(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right)$, on a aussi :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\,\vec{u} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{v} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{k}} \tag{4}$$

On conserve alors (3) en écrivant dans ce repère :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho}\,\vec{u} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\,\vec{v} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}} \tag{5}$$

Tous les champs qui interviendront dans la suite seront supposés de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert Ω.

Problème 1

$$\text{Retrouver la formule : } \quad \operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} \tag{6}$$

La formule de la divergence, dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}} \tag{7}$$

se traduit par le produit scalaire symbolique :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} \tag{8}$$

Le traitement « brutal » de $\vec{\nabla}$ en vecteur conduit alors à écrire :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{\nabla}.(\vec{A} \wedge \vec{B}) \\
&= (\vec{\nabla}, \vec{A}, \vec{B}) \qquad \text{(produit mixte)} \\
&= (\vec{B}, \vec{\nabla}, \vec{A}) \\
&= \vec{B}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \\
&= \vec{B}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}
\end{aligned}$$

et voilà qu'il manque un terme ! Bien sûr, une autre permutation du produit mixte fournira le deuxième… en ayant soin de gommer le premier !

Problème 2

$$\text{Retrouver la formule : } \quad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\,E_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{9}$$

Il serait pour cela agréable d'effectuer le produit scalaire symbolique (8) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$:

$$\begin{aligned}
\text{div }\vec{E} &= \vec{\nabla}.\vec{E} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\,\vec{u} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\,\vec{v} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}\right).\left(E_\rho\,\vec{u} + E_\theta\,\vec{v} + E_z\,\vec{k}\right) \\
&= \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

en traitant les dérivations partielles comme d'anodines composantes… et voilà qu'ici encore manque un terme, $\frac{1}{\rho}\,E_\rho$.

2 Pseudo-vecteur ou opérateur ?

On peut sans difficulté offrir à $\vec{\nabla}$ un statut mathématique élémentaire, celui d'*opérateur différentiel*, c'est-à-dire d'application (en outre, *linéaire*, ce qui ne gâte rien !) entre espaces de fonctions. Avec, toutefois, une réserve de mathématicien sourcilleux : suivant que l'on calcule un gradient, une divergence ou un rotationnel, $\vec{\nabla}$ *n'opère pas entre les mêmes espaces*.

Il y a donc, mathématiquement, *trois* opérateurs que l'on peut appeler $\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}.$ et $\vec{\nabla}\wedge$, chaque expression *formant un tout*. On va montrer pourquoi, ayant posé la première, les deux notations suivantes sont judicieuses (c'est-à-dire qu'elles « fonctionnent » bien d'un point de vue de calcul formel), *modulo un petit abus*, responsable des cafouillages antérieurs si l'on n'en est pas conscient, mais qui, compris et maîtrisé, permettra des calculs parfaitement sûrs.

2.1 Trois $\vec{\nabla}$... dont l'habituel !

On notera, pour faciliter la distinction de visu :

- $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'espace des *fonctions réelles* de classe C^1 sur Ω,
- $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ l'espace des *champs de vecteurs* de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Les trois applications opèrent alors ainsi :

$$\begin{array}{rrcl} \vec{\nabla}: & C^1(\Omega,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{R}^3) \\ & V & \mapsto & \vec{\nabla}V = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \vec{\nabla}.: & \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^3) & \to & C^0(\Omega,\mathbb{R}) \\ & \vec{E} & \mapsto & \vec{\nabla}.\vec{E} = \mathrm{div}\, \vec{E} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \vec{\nabla}\wedge: & \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^3) & \to & \mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{R}^3) \\ & \vec{E} & \mapsto & \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V &= \vec{\imath}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\ &= \left(\vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right) V \end{aligned}$$

ce qui définit bien $\vec{\nabla}$ comme un opérateur qui, à la fonction V, associe le vecteur dont la première composante est $\frac{\partial V}{\partial x}$, etc.

On peut alors « justifier » les deux dernières notations.

2.2 $\vec{\nabla}.$, l'opérateur divergence

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{E}.\vec{\imath}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{E}.\vec{\jmath}) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{E}.\vec{k}) \\ &= \vec{\imath}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \vec{\jmath}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \vec{k}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \end{aligned}$$

car $\dfrac{\partial}{\partial x}(\vec{E}.\vec{\imath}) = \vec{\imath}.\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \dfrac{\partial \vec{\imath}}{\partial x}.\vec{E}$ et, bien sûr, $\dfrac{\partial \vec{\imath}}{\partial x} = \vec{0}$, effarante banalité… qui donnera pourtant la clef du problème 2.

On peut donc écrire en toute légitimité :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \left(\vec{\imath}.\frac{\partial}{\partial} + \vec{\jmath}.\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}.\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{E}$$

Mais par contre c'est par *abus* qu'on l'écrit :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\vec{E}$$

qui correspond à une sournoise — parce que *clandestine* — permutation d'une dérivation et d'un produit scalaire.

Évidemment, la deuxième serait plus jolie, parce que, dans l'écriture $\vec{\nabla}.\vec{E} = \mathrm{div}\,\vec{E}$, $\vec{\nabla}$ et . pourraient être considérées comme des *entités séparées*, chacune ayant son sens propre — pour $\vec{\nabla}$, celui donné au début de ce paragraphe.

Par contre, la première définit parfaitement un opérateur $\vec{\nabla}.$ qui au champ $\vec{E}$ associe la somme de trois termes analogues, dont le premier est le produit scalaire des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$.

Le . joue ici *le rôle d'un indice*, dont le nom a été choisi habilement (ou… démoniaquement !) pour rappeler la similitude avec $\vec{\nabla}$, à des signes de produit scalaire . près *qu'il appartient à l'utilisateur de replacer correctement avant tout calcul.*

2.3 $\vec{\nabla}\wedge$, l'opérateur rotationnel

On part de la formule, aisément vérifiable par le calcul :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\imath}\wedge\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + \vec{\jmath}\wedge\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + \vec{k}\wedge\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}$$

ce qu'on peut écrire, aussi légitimement qu'en 2.2, la seule modification étant le remplacement des produits scalaires par des produits vectoriels :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \left(\vec{\imath}\wedge\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\wedge\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\wedge\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{E}$$

Mais c'est par contre par *abus* qu'on l'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\wedge\vec{E}$$

qui correspond à une sournoise — parce que *clandestine* — permutation d'une dérivation et d'un produit vectoriel.

Évidemment, la deuxième serait plus jolie, parce que... Hum, hum... N'abusons pas des facilités des traitements de texte pour faire de la fabuleuse saga des *trois nablas* un mauvais remake de *Boucle d'or et les trois ours*.

Mais indiquons tout de même que le $\wedge$ joue ici le *rôle d'un indice*, et *qu'il appartient à l'utilisateur de* $\vec{\nabla}\wedge$ *de replacer correctement les symboles de produit vectoriel avant tout calcul.*

2.4 Tableau récapitulatif

	Définition d'opérateur	Notation (abus)
$\vec{\nabla}$	$\vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$	
$\vec{\nabla}.$	$\vec{\imath}.\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}.\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}.\frac{\partial}{\partial z}$	$\left(\vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right).$
$\vec{\nabla}\wedge$	$\vec{\imath}\wedge\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\wedge\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\wedge\frac{\partial}{\partial z}$	$\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\wedge$

3 Se servir de $\vec{\nabla}$ en toute sécurité

3.1 Retour au problème 1

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}.(\vec{A}\wedge\vec{B}) &= \left(\vec{\imath}.\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}.\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}.\frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{A}\wedge\vec{B}) \quad \text{par définition !}\\ &= \vec{\imath}.\frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\wedge\vec{B}) + \vec{\jmath}.\frac{\partial}{\partial y}(\vec{A}\wedge\vec{B}) + \vec{k}.\frac{\partial}{\partial z}(\vec{A}\wedge\vec{B})\end{aligned}$$

Or, on sait que :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}$$

car cela résulte de la bilinéarité du produit vectoriel et de la linéarité de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}.(\vec{A}\wedge\vec{B}) &= \vec{\imath}.\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\wedge\vec{B} + \vec{\jmath}.\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\wedge\vec{B} + \vec{k}.\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\wedge\vec{B} + \vec{\imath}.\vec{A}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + \vec{\jmath}.\vec{A}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + \vec{k}.\vec{A}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\\ &= \left(\vec{\imath},\frac{\partial\vec{A}}{\partial x},\vec{B}\right) + \left(\vec{\jmath},\frac{\partial\vec{A}}{\partial y},\vec{B}\right) + \left(\vec{k},\frac{\partial\vec{A}}{\partial z},\vec{B}\right) + \left(\vec{\imath},\vec{A},\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}\right) + \left(\vec{\jmath},\vec{A},\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}\right) + \left(\vec{k},\vec{A},\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

Il s'agit ici de *vrais* produits mixtes (les trois objets étant des vecteurs) qu'une permutation circulaire n'altèrera pas (dans la première ligne) tandis qu'une transposition changera le signe (dans la deuxième ligne). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.(\vec{A}\wedge\vec{B}) &= \left(\vec{B},\vec{\imath},\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\right)+\left(\vec{B},\vec{\jmath},\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\right)+\left(\vec{B},\vec{k},\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\right)-\left(\vec{A},\vec{\imath},\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}\right)-\left(\vec{A},\vec{\jmath},\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}\right)-\left(\vec{A},\vec{k},\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right)\\
&= \vec{B}.\vec{\imath}\wedge\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}+\vec{B}.\vec{\jmath}\wedge\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}+\vec{B}.\vec{k}\wedge\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}-\vec{A}.\vec{\imath}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}-\vec{A}.\vec{\jmath}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}-\vec{A}.\vec{k}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\\
&= \vec{B}.\left(\vec{\imath}\wedge\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}+\vec{\jmath}\wedge\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}+\vec{k}\wedge\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\right)-\vec{A}.\left(\vec{\imath}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}+\vec{\jmath}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}+\vec{k}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right)\\
&= \vec{B}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})-\vec{A}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})\\
&= \vec{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}-\vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}
\end{aligned}$$

de nouveau, par définition de l'opérateur $\vec{\nabla}\wedge$.

On a ainsi évité un calcul explicite par composantes, tout en restant parfaitement rigoureux. L'explication de la faute antérieure est en outre très claire : traiter $\vec{\nabla}$ comme un vecteur dans le produit mixte revient à affirmer que $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\vec{A}\wedge\ldots$ commutent et donc à « perdre » un terme sur deux dans la dérivée d'un produit : exactement ce qui s'était passé !

3.2 Retour au problème 2

Notre objectif n'est ici que de vérifier que la formule :

$$\vec{\nabla}. = \left(\vec{u}\,\frac{\partial}{\partial\rho}+\vec{v}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

utilisée comme notation pour un opérateur défini par :

$$\vec{\nabla}. = \vec{u}.\frac{\partial}{\partial\rho}+\vec{v}.\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{k}.\frac{\partial}{\partial z}$$

permet de *retrouver* sans faute la formule (9), et *non de l'établir* : il n'y a pas de miracle et le calcul des dérivées composées, lié au changement de variables, ne pourrait être escamoté !

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{E} &= \vec{u}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial\rho}+\vec{v}.\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial\theta}+\vec{k}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}\\
&= \frac{\partial}{\partial\rho}(\vec{E}.\vec{u})+\frac{1}{\rho}\,\vec{v}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial z}(\vec{E}.\vec{k})\\
&= \frac{\partial E_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\,\vec{v}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial\theta}+\frac{\partial E_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

car, comme en 2.2, on a :

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\vec{E}.\vec{u}) = \vec{u}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial\rho}+\frac{\partial\vec{u}}{\partial\rho}.\vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\vec{u}}{\partial\rho}=\vec{0}$$

Mais cette fois la deuxième relation n'est plus banale, car la base n'est pas fixe, mais mobile ! Toutefois $\vec{u}$ n'est fonction que de θ, et pas de ρ.

Par contre, il va falloir faire attention au terme central, puisque $\vec{v}$ dépend de θ. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{E}.\vec{v}) &= \vec{v}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial\theta}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial\theta}.\vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\vec{v}}{\partial\theta}=-\vec{u}\\
\vec{v}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{E}.\vec{v})+\vec{u}.\vec{E}=\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}+E_\rho
\end{aligned}$$

Et ainsi réapparaît bien le terme manquant du « calcul » sommaire :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\,E_\rho+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Comme en 3.1, l'abus de notation a fait commuter une dérivation et un produit, scalaire cette fois. C'est bien sûr faux, mais cela passe inaperçu tant que le terme manquant est nul, ce qui est toujours le cas avec la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ fixe, et le cas de deux termes sur trois avec la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$!

3.3 Exemple complémentaire : calcul du rotationnel en cylindriques

Comme en 3.2, on *vérifie* l'obtention de la formule usuelle :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= \left(\vec{u}\,\frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{v}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \right) \wedge \vec{E} \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= \vec{u} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\vec{v} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial \theta} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \quad \text{par définition}
\end{aligned}$$

Soit en écrivant $\vec{E} = E_\rho\,\vec{u} + E_\theta\,\vec{v} + E_z\,\vec{k}$, puis en calculant les dérivées partielles — seul $\frac{\partial}{\partial \theta}$ agissant sur les vecteurs de base :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{u} \wedge & \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial \rho}\,\vec{u} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho}\,\vec{v} + \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\,\vec{k} \right) \\
& + \frac{1}{\rho}\,\vec{v} \wedge \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial \theta}\,\vec{u} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}\,\vec{v} + \frac{\partial E_z}{\partial \theta}\,\vec{k} + E_\rho\,\vec{v} - E_\theta\,\vec{u} \right) \\
& + \vec{k} \wedge \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z}\,\vec{u} + \frac{\partial E_\theta}{\partial z}\,\vec{v} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,\vec{k} \right) \\
= & -\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\,\vec{v} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho}\,\vec{k} \\
& + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial E_z}{\partial \theta}\,\vec{u} - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial E_\rho}{\partial \theta}\,\vec{k} + \frac{1}{\rho}\,E_\theta\,\vec{k} \\
& - \frac{\partial E_\theta}{\partial z}\,\vec{u} + \frac{\partial E_\rho}{\partial z}\,\vec{v}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = & \left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \vec{u} \\
& + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \vec{v} \\
& + \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial E_\rho}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\,E_\theta \right) \vec{k}
\end{aligned}} \tag{10}$$

4 Fluide glacial pour produit scalaire

Un calcul classique en mécanique des fluides amène à l'introduction du symbole $\vec{V}.\vec{\nabla}$, immédiatement suivi, en général, du vif regret inspiré par son peu de ressemblance avec $\vec{\nabla}.\vec{V}$. Le point de vue adopté ici doit nous permettre de ne pas en être surpris, bien au contraire, car *par définition même il doit s'agir de deux objets non comparables.*

Il paraît raisonnable de choisir :

$$\begin{aligned}
\vec{V}.\vec{\nabla} &= \left(V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k} \right) . \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k} \right) \\
&= V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que ce sera un *opérateur*, dont on prendra pour *définition* :

$$\boxed{\vec{V}.\vec{\nabla}(\vec{E}) = V_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}}$$

et l'on verra qu'il en est bien ainsi dans le calcul incriminé.

Alors $\vec{V}.\vec{\nabla}$ est une *application* :

$$\vec{V}.\vec{\nabla} : \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \to \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

et $\vec{\nabla}.\vec{E} = \operatorname{div} \vec{E}$ un élément de $C^0(\Omega, \mathbb{R})$. Toute comparaison avec $=$ est donc un non-sens.

Jetons pour terminer un petit coup d'œil à ce calcul, fort édifiant quant aux confusions possibles en l'absence de notations *différentes* pour des fonctions mathématiquement *différentes*, quoique associées à une *même* grandeur physique.

Dans un fluide en mouvement, il y a un champ des vitesses :

$$\vec{V}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (M,t) & \mapsto & \vec{V}(M,t) \end{array}$$

Une particule en mouvement décrit une trajectoire :

$$\gamma: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & M = \gamma(t) \end{array}$$

Sa vitesse en tout point est donc $\vec{V}[\gamma(t), t] = \vec{v}(t)$, $\vec{v}$ étant une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, obtenue par la composition : $\vec{v} = \vec{V} \circ \hat{\gamma}$, où l'on pose :

$$\hat{\gamma}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \hat{\gamma}(t) = [\gamma(t), t] \end{array}$$

Et bien sûr, $\vec{v}$ est encore abusivement écrite $\vec{V}$! On voit alors écrit :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\,1$$

avec la grinçante cohabitation du d et du ∂ pour la même fonction $\vec{V}$. C'est aberrant mathématiquement, mais surtout — et c'est plus grave ! — déroutant pour le débutant en Calcul Différentiel, qui n'a pourtant pas besoin de bâtons dans les roues…

Alors qu'il est très simple d'appliquer le théorème de composition des différentielles. Supposant bien entendu $\vec{V}$ et γ de classe $\mathcal{C}^1$, $\vec{v}$ l'est également et les matrices jacobiennes vérifient :

$$J\big[\vec{v};t\big] = J\big[\vec{V};\hat{\gamma}(t)\big].J\big[\hat{\gamma};t\big]$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dv_x}{dt} \\ \dfrac{dv_y}{dt} \\ \dfrac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_x}{\partial x}\circ\hat{\gamma} & \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\circ\hat{\gamma} & \dfrac{\partial V_x}{\partial z}\circ\hat{\gamma} & \dfrac{\partial V_x}{\partial t}\circ\hat{\gamma} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x}\circ\hat{\gamma} & \dfrac{\partial V_y}{\partial y}\circ\hat{\gamma} & \dfrac{\partial V_y}{\partial z}\circ\hat{\gamma} & \dfrac{\partial V_y}{\partial t}\circ\hat{\gamma} \\ \dfrac{\partial V_z}{\partial x}\circ\hat{\gamma} & \dfrac{\partial V_z}{\partial y}\circ\hat{\gamma} & \dfrac{\partial V_z}{\partial z}\circ\hat{\gamma} & \dfrac{\partial V_z}{\partial t}\circ\hat{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit vectoriellement :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\circ\hat{\gamma} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\circ\hat{\gamma} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\circ\hat{\gamma} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\circ\hat{\gamma}$$

que l'on peut écrire, pour l'agrément d'une formule plus compacte :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \big[\big(\vec{v}(t).\vec{\nabla}\big)\vec{V}\big]\circ\hat{\gamma} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\circ\hat{\gamma}$$

ce qui signifie qu'une fois l'opérateur $\big(\vec{v}(t).\vec{\nabla}\big)$ évalué sur $\vec{V}$, on remplace x par $x(t)$, etc.

Il est évidemment plus léger de sous-entendre les «$\circ\hat{\gamma}$» tout en les gardant bien en tête et d'avoir ainsi — ou presque, puisqu'on maintient ici, pour les raisons mathématiques évoquées, la distinctions entre $\vec{v}$ et $\vec{V}$ — la formule du cours de physique :

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \big(\vec{v}(t).\vec{\nabla}\big)\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}$$

Il n'y subsiste plus que l'abus d'une dénomination analogue pour l'unique variable $\vec{v}$ et la quatrième variable de $\vec{V}$, incontournable vu le rôle particulier du paramètre temps.