EXTRAIT

D'un Mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable ;

PAR MM. C. STURM ET J. LIOUVILLE.

Soient x une variable indépendante comprise entre deux limites données x, X ; g, k, l trois fonctions positives de x ; r un paramètre indéterminé ; et V une fonction de x et de r, qui satisfasse à la fois à l'équation indéfinie

$$(1) \qquad \frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0,$$

et à la condition définie

$$(2) \qquad \frac{dV}{dx} - hV = 0 \quad \text{pour} \quad x = \text{x},$$

dans laquelle h représente un nombre donné positif. Il est aisé de trouver une fonction V qui vérifie ces deux équations et qui ne devienne identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, lorsque x reste indéterminée. On s'est beaucoup occupé des propriétés de la fonction V dans différents mémoires auxquels nous renverrons le lecteur (*).

(*) Tome I de ce Journal, pages 106, 253, 269, 373, et tome II, page 16.

Désignons par H un coefficient positif et par $\varpi(r)$ ce que devient la quantité $\frac{dV}{dx} + HV$ lorsqu'on y fait $x = X$: on sait que l'équation $\varpi(r) = 0$ a une infinité de racines toutes réelles et positives que nous nommerons $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$ en les supposant rangées dans un ordre de grandeurs croissantes. Nous représenterons par V_n ou $V_n(x)$ ce que devient V lorsqu'on fait $r = r_n$. Ainsi l'on aura à la fois

$$(3) \qquad \frac{d\left(k\frac{dV_n}{dx}\right)}{dx} + (gr_n - l)V_n = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{dV_n}{dx} - hV_n = 0 \quad \text{pour} \quad x = x,$$

$$(5) \qquad \frac{dV_n}{dx} + HV_n = 0 \quad \text{pour} \quad x = X.$$

Cela posé, on peut chercher à sommer la série

$$(6) \qquad \Sigma\left\{\frac{V_n\int_x^X gV_nf(x)dx}{\int_x^X gV_n^2dx}\right\},$$

dans laquelle le signe Σ s'applique aux valeurs successives 1, 2, 3,.... de l'indice n, et où $f(x)$ est une fonction arbitraire de x qui ne devient jamais infinie. Soit $F(x)$ la somme demandée. Il s'agit de prouver d'une manière directe et rigoureuse que l'on a $F(x) = f(x)$. Déjà l'un de nous a traité cette question dans un mémoire particulier; mais comme la série (6) se présente dans une foule de problèmes de physique mathématique, nous avons pensé qu'il était bon de revenir sur ce sujet. Au surplus, la méthode dont nous allons faire usage diffère beaucoup de celle que l'on a d'abord employée.

Combinons entre elles les équations (1) et (3); en ayant égard aux conditions (2), (4), nous aurons sans difficulté

$$\int_x^x gVV_ndx = \frac{k}{r - r_n}\left(V\frac{dV_n}{dx} - V_n\frac{dV}{dx}\right).$$

En posant $x = X$ et se rappelant que, pour cette valeur de x, $\frac{dV_n}{dx} + HV_n$ se réduit à zéro et $\frac{dV}{dx} + HV$ à $\varpi(r)$, il vient donc

$$(7) \qquad \int_x^X g\mathrm{V}\mathrm{V}_n \mathrm{d}x = -\mathrm{K}\mathrm{V}_n(\mathrm{X}) \cdot \frac{\varpi(r)}{r - r_n} \cdot$$

K et $\mathrm{V}_n(\mathrm{X})$ représentent les valeurs respectives de k et de V_n pour $x = \mathrm{X}$. Dans le cas particulier où $r = r_n$, le second membre de la formule (7) prend la forme $\frac{0}{0}$: en cherchant alors sa vraie valeur par la règle connue, on trouve

$$(8) \qquad \int_x^X g\mathrm{V}_n^2 \mathrm{d}x = -\mathrm{K}\mathrm{V}_n(\mathrm{X})\varpi'(r_n).$$

D'un autre côté on peut démontrer que la fraction $\frac{\mathrm{V}}{\varpi(r)}$ est décomposable en fractions simples. Par les méthodes connues pour ce genre de décomposition, on obtient

$$\frac{\mathrm{V}}{\varpi(r)} = \Sigma \left\{ \frac{\mathrm{V}_n}{(r - r_n)\varpi'(r_n)} \right\},$$

d'ou résulte

$$(9) \qquad \mathrm{V} = \Sigma \left\{ \frac{\varpi(r)\mathrm{V}_n}{(r - r_n)\varpi'(r_n)} \right\}.$$

A l'aide des formules (7) et (8), on peut éliminer $\varpi(r)$, $\varpi'(r_n)$: cette élimination faite, si l'on multiplie l'équation (9) par $gf(x)dx$ et si l'on intègre ensuite, on obtient finalement

$$\int_x^X g\mathrm{V}f(x)\mathrm{d}x = \Sigma \left\{ \frac{\int_x^X g\mathrm{V}\mathrm{V}_n \mathrm{d}x \cdot \int_x^X g\mathrm{V}_n f(x)dx}{\int_x^X g\mathrm{V}_n^2 \mathrm{d}x} \right\}.$$

Mais en multipliant par $g\mathrm{V}\mathrm{d}x$ et intégrant les deux membres de l'équation

$$\mathrm{F}(x) = \Sigma \left\{ \frac{\mathrm{V}_n \int_x^X g\mathrm{V}_n f(x)\mathrm{d}x}{\int_x^X g\mathrm{V}_n^2 \mathrm{d}x} \right\},$$

on a de même

$$\int_x^X g\mathrm{V}\mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x = \Sigma \left\{ \frac{\int_x^X g\mathrm{V}\mathrm{V}_n \mathrm{d}x \cdot \int^X g\mathrm{V}_n f(x)\mathrm{d}x}{\int_x^X g\mathrm{V}_n^2 dx} \right\}.$$

Les deux intégrales

$$\int_x^X gVf(x)\,dx, \quad \int_x^X gVF(x)\,dx$$

sont donc égales entre elles, en sorte que l'on a

$$\int_x^X gV[F(x) - f(x)]\,dx = 0.$$

Cette dernière équation doit avoir lieu quel que soit r, et l'on peut aisément prouver qu'elle entraine la suivante $F(x) = f(x)$, C. Q. F. D.

La méthode que nous venons d'employer pour sommer la série (6) est à la fois très simple et très générale. Elle peut servir à trouver la somme d'un grand nombre d'autres séries, comme on le verra dans notre mémoire, où l'analyse précédente est présentée sous plusieurs points de vue (*).

(*) L'abondance des matières nous force à différer la publication de ce Mémoire. L'extrait qu'on vient de lire a déjà été imprimé dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, tome IV, page 675. (J. LIOUVILLE.)