SUR L'IRRATIONNALITÉ DU NOMBRE $e = 2,718\ldots$;

PAR J. LIOUVILLE.

On prouve dans les éléments que le nombre e, base des logarithmes népériens, n'a pas une valeur rationnelle. On devrait, ce me semble, ajouter que la même méthode prouve aussi que e ne peut pas être racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, en sorte que l'on ne peut pas avoir $ae + \frac{b}{e} = c$, a étant un entier positif et b, c, des entiers positifs ou négatifs. En effet, si l'on remplace dans cette équation e et $\frac{1}{e}$ ou e^{-1} par leurs développements déduits de celui de e^x, puis qu'on multiplie les deux membres par $1.2.3\ldots n$, on trouvera aisément

$$\frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \ldots\right) \pm \frac{b}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2} + \ldots\right) = \mu,$$

μ étant un entier. On peut toujours faire en sorte que le facteur

$$\pm \frac{b}{n+1}$$

soit positif; il suffira de supposer n pair si b est <0 et n impair si b est >0; en prenant de plus n très grand, l'équation que nous venons d'écrire conduira dès lors à une absurdité; car son premier membre étant essentiellement positif et très petit, sera compris entre 0 et 1, et ne pourra pas être égal à un entier μ. Donc, etc.

ADDITION

A LA

NOTE SUR L'IRRATIONNALITÉ DU NOMBRE e;

PAR J. LIOUVILLE.

On peut étendre au carré du nombre e le théorème que nous avons démontré dans le dernier cahier de ce Journal; en d'autres termes, on peut prouver que l'équation $ae^2 + be^{-2} = c$ est impossible, a désignant un entier positif, et b, c des entiers positifs, nuls ou négatifs.

En effet, représentons avec Legendre par $\mathrm{E}(x)$ la partie entière contenue dans un nombre positif quelconque x: la somme

$$\mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{4}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{8}\right) + \ldots$$

indiquera combien de fois le facteur 2 entre dans le produit $1.2.3\ldots m$: cette somme est évidemment plus petite que $\frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \frac{m}{8} + \ldots$, c'est-à-dire plus petite que m; de plus, elle a pour valeur $m-1$ ou $m-2$ respectivement, lorsque m est une puissance exacte de 2 ou une telle puissance augmentée d'une unité; on voit par là que la fraction irréductible équivalente à $\frac{2^m}{1.2.3\ldots m}$ est de la forme $\frac{2^{\alpha_m}}{p_m}$, α_m étant un exposant essentiellement positif qui devient égal à 1 quand on a $m = 2^i$ et égal à 2 quand $m = 2^i + 1$; ajoutons que si n est un entier $> m$, p_n sera divisible par p_m.

Cela posé, j'observe que, d'après une formule connue, on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\left(1 + \frac{xe^{\theta x}}{n+1}\right),$$

θ désignant un certain nombre compris entre 0 et 1. Soient β, γ les valeurs de $\frac{e^{\beta x}}{n+1}$ relatives à $x = 2$ et $x = -2$, lesquelles deviendront plus petites que tout nombre donné, en prenant n suffisamment grand. En faisant, comme ci-dessus,

$$\frac{2^m}{1.2.3\ldots m} = \frac{2^{\alpha_m}}{p_m},$$

nous obtiendrons

$$e^2 = 1 + \ldots + \frac{2^{\alpha_m}}{p_m} \ldots\ldots + \frac{2^{\alpha_n}}{p_n}(1 + 2\beta),$$

$$e^{-2} = 1 - \ldots \pm \frac{2^{\alpha_m}}{p_m} \ldots\ldots \pm \frac{2^{\alpha_n}}{p_n}(1 - 2\gamma).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $ae^2 + be^{-2} = c$, puis multipliant les deux membres par p_n, on trouve ensuite, sans difficulté,

$$a.2^{\alpha_n}.2\beta \mp b.2^{\alpha_n}.2\gamma = \mu,$$

μ étant un entier. Or cette équation est absurde; en effet on pourra rendre de même signe les deux facteurs a et $\mp b$; il suffira, par exemple, de prendre $n = 2^i$ si b est < 0, et $n = 2^i + 1$ si b est > 0; d'ailleurs, dans la première de ces deux hypothèses, on aura $\alpha_n = 1$, et dans la seconde, $\alpha_n = 2$; dès lors, en donnant à i une valeur très considérable, on voit que la somme $a.2^{\alpha_n}.2\beta \mp b.2^{\alpha_n}.2\gamma$ sera essentiellement positive et très petite, de sorte qu'elle ne pourra pas être égale à un entier μ. Donc, etc.