

Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques ;

PAR J. LIOUVILLE.

1. J'ai présenté, il y a longtemps, sur ce sujet, à l'Académie des Sciences, et fait insérer dans le tome XVIII des *Comptes rendus* (pages 883 et 910; séances des 13 et 20 mai 1844) deux Notes que je crois devoir reproduire ici en les complétant. La première est ainsi conçue :

« Pour donner des exemples de fractions continues dont on puisse démontrer en toute rigueur que leur valeur n'est racine d'aucune équation algébrique

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + gx + h = 0,$$

a, b, \dots, g, h étant des entiers, il suffit de se rappeler que $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ étant deux réduites successives de la fraction continue qui exprime le développement d'une racine incommensurable x de cette équation, le quotient incomplet μ , qui vient après la réduite $\frac{p_2}{q_2}$, et sert à former la réduite suivante, finira (cela résulte d'une formule de Lagrange, voyez les Mémoires de Berlin, année 1768) par être, pour des valeurs de q très-grandes, constamment inférieur à

$$\pm \frac{df(p, q)}{qf(p, q)dp},$$

expression essentiellement positive où l'on suppose

$$f(p, q) = q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = ap^n + bp^{n-1}q + \dots + hq^n.$$

» Abstraction faite des signes, on aura dès lors, à plus forte raison,

$$\mu < \frac{df(p, q)}{q dp},$$

puisque $f(p, q)$ est un entier égal au moins à l'unité si l'on admet (ce qui est permis) que l'équation

$$f(x) = 0$$

a été débarrassée de tout facteur commensurable; $f(p, q) = 0$ donnerait, en effet,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0.$$

» Maintenant représentons par $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$; l'inégalité ci-dessus deviendra

$$\mu < q^{n-2} f'\left(\frac{p}{q}\right).$$

Or, $f'\left(\frac{p}{q}\right)$ est une quantité finie qui tend vers la limite $f'(x)$, comme $\frac{p}{q}$ vers la limite x . En désignant par A un certain nombre fixe supérieur à cette limite, on sera donc certain d'avoir

$$\mu < A q^{n-2}.$$

» Ainsi, les quotients incomplets d'une fraction continue représentant la racine x d'une équation algébrique de degré n , à coefficients rationnels, sont assujettis à ne jamais dépasser le produit d'un certain nombre constant par la puissance $(n-2)^{\text{ième}}$ du dénominateur de la réduite précédente.

» Il suffira de donner aux quotients incomplets μ un mode de formation qui les fasse grandir au delà du terme indiqué, pour obtenir des fractions continues dont la valeur ne pourra satisfaire à aucune équation algébrique proprement dite; cela arrivera, par exemple, si, partant d'un premier quotient incomplet quelconque, on forme chacun des suivants μ à l'aide de la réduite $\frac{p}{q}$ qui le précède, d'après la

loi $\mu = q^g$, ou bien encore d'après la loi $\mu = q^m$, m étant l'indice du rang de μ .

» Au reste, la méthode précédente, qui s'est offerte la première, n'est ni la seule ni même la plus simple qu'on puisse employer. Ajoutons qu'il y a aussi des théorèmes analogues pour les séries ordinaires. Nous citerons en particulier la série

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l^{1,2}} + \frac{1}{l^{1,2,3}} + \dots + \frac{1}{l^{1,2,3,\dots,m}} + \dots,$$

l étant un nombre entier. »

2. La seconde Note contient une démonstration nouvelle et plus simple du théorème auquel j'avais été conduit par la formule citée de Lagrange. La vraie force de notre méthode est, comme on va le voir, indépendante de cette formule.

« Soient $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ les n racines (la première réelle, les autres réelles ou imaginaires) de l'équation algébrique

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + gx + h = 0,$$

que l'on peut supposer irréductible, et où a, b, \dots, g, h sont des entiers positifs, nuls ou négatifs, comme on voudra. Désignons par $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}$ deux réduites consécutives de la fraction continue dans laquelle x se développe; et par z le quotient complet qui vient après, en sorte que l'on ait

$$\frac{p_1}{q_1} - x = \pm \frac{1}{q(qz + q_0)}.$$

Enfin, posons

$$f(p, q) = q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = ap^n + bp^{n-1}q + \dots + hq^n.$$

» Par la décomposition de $f\left(\frac{p}{q}\right)$ en facteurs, opérée à l'aide des racines x, x_1, \dots, x_{n-1} , on trouve

$$\frac{p}{q} - x = \pm \frac{1}{q(qz + q_0)} = \frac{f(p, q)}{q^n \cdot a \left(\frac{p}{q} - x_1\right) \dots \left(\frac{p}{q} - x_{n-1}\right)}.$$

» Or, à mesure que la réduite $\frac{p}{q}$ converge vers x , la quantité

$$a \left(\frac{p}{q} - x_1 \right) \cdots \left(\frac{p}{q} - x_{n-1} \right)$$

converge aussi vers une limite finie, savoir,

$$a(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1});$$

il y a donc un certain maximum A au-dessous duquel elle restera toujours. D'un autre côté, $f(p, q)$ est un nombre entier, au moins égal à l'unité, abstraction faite du signe. On a donc

$$\frac{1}{q(qz + q_0)} > \frac{1}{Aq^n},$$

d'où

$$z < Aq^{n-2} - \frac{q_0}{q} < Aq^{n-2},$$

inégalité qui subsiste, à plus forte raison, quand on substitue au quotient complet z la partie entière qu'il contient, c'est-à-dire le quotient incomplet μ . Le théorème que nous avons en vue est ainsi démontré d'une manière simple, sans qu'on ait eu besoin de recourir à la formule de Lagrange dont nous avons d'abord fait usage. On peut, du reste, appliquer une méthode semblable aux divers genres de développements dont les quantités irrationnelles sont susceptibles, et obtenir par là des résultats intéressants. »

5. Ajoutons à ce qui précède quelques développements. Considérons toujours une racine réelle x de l'équation, irréductible et à coefficients entiers,

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + gx + h = 0.$$

qui, si n est > 1 , aura aussi ces autres racines x_1, \dots, x_{n-1} , essentiellement irrationnelles ou imaginaires et différentes de x . Mais cessons de nous assujettir à employer, pour approcher de plus en plus de x , des réduites de fraction continue, et servons-nous de fractions $\frac{p}{q}$

quelconques. En faisant, comme ci-dessus,

$$f(p, q) = ap^n + bp^{n-1}q + \dots + hq^n,$$

nous serons certains, si n est > 1 , que la valeur absolue de l'entier $f(p, q)$ est au moins égale à l'unité, et nous tirerons encore de l'équation

$$\frac{p}{q} - x = \frac{f(p, q)}{q^n \cdot a \left(\frac{p}{q} - x_1\right) \dots \left(\frac{p}{q} - x_{n-1}\right)}$$

cette conséquence, qu'en désignant par A un certain nombre fixe, on doit avoir (abstraction faite du signe) pour toutes les fractions $\frac{p}{q}$ dont nous nous servons actuellement,

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq^n}.$$

Mais le cas de $n = 1$ doit être à son tour examiné de près. Ce cas ne pouvait pas se présenter tout à l'heure; car par cela même qu'on supposait la fraction continue, dans laquelle on développait x , composée d'un nombre infini de termes, on avait x irrationnelle et $n > 1$. Mais ici, tout en continuant à supposer en nombre infini les fractions successives $\frac{p}{q}$ dont x est la limite, on doit regarder comme possible le cas de $n = 1$.

Pour traiter ce cas, soit donc

$$f(x) = ax + b = 0.$$

d'où

$$\frac{p}{q} - x = \frac{ap + bq}{aq}.$$

S'il pouvait arriver que le numérateur $ap + bq$ fût nul, nous ne pourrions tirer de là aucune conclusion. Mais si nous nous sommes assurés par un moyen quelconque que l'on n'a jamais

$$ap + bq = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{p}{q},$$

nous pourrions affirmer dès lors que l'on a

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{aq},$$

ou bien

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq},$$

en écrivant A au lieu de a . La formule générale

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq^n}$$

subsistera donc même dans le cas de $n = 1$.

Cela posé, admettons qu'une quantité x soit telle, qu'en formant des fractions $\frac{p}{q}$ en nombre indéfini et tendantes vers x , mais dont aucune ne soit précisément égale à x , on finisse par reconnaître que l'inégalité

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq^n}$$

n'a pas toujours lieu. Il faudra en conclure que x ne peut être racine d'une équation de degré n . Ajoutons que x ne sera racine d'aucune équation de degré inférieur i ; car ayant

$$\frac{p}{q} - x < \frac{1}{Aq^n},$$

on aura, à fortiori,

$$\frac{p}{q} - x < \frac{1}{Aq^i}$$

pour tout exposant i moindre que n . Ainsi, ayant constaté que l'inégalité

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq}$$

est en défaut, on en conclura que la valeur de x n'est pas rationnelle. Si l'inégalité d'ordre plus élevé

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{\Lambda q^2}$$

est inadmissible, on en conclura que x n'est ni rationnelle, ni même racine d'une équation du second degré; et ainsi de suite. Enfin, s'il arrive que l'inégalité

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{\Lambda q^n}$$

se trouve généralement en défaut quelque nombre fini qu'on prenne pour n , on pourra affirmer que x n'est pas même une irrationnelle algébrique.

4. Soit, par exemple,

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^{1,2}} + \frac{1}{l^{1,2,3}} + \dots + \frac{1}{l^{1,2,\dots,m}} + \dots,$$

l étant un nombre entier. En ramenant à la forme $\frac{p}{q}$ la valeur approchée, mais essentiellement trop petite de x , que donnent les m premiers termes de la série, on aura

$$q = l^{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$$

et

$$x - \frac{p}{q} = \frac{1}{l^{1,2,\dots,m(m+1)}} + \dots < \frac{2}{q^{m+1}}$$

Quand l'exposant m grandit indéfiniment, cette dernière quantité décroît plus rapidement que toute fraction ayant un numérateur constant et un dénominateur proportionnel à une puissance donnée de q , en sorte que l'inégalité

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{\Lambda q^n}$$

finit toujours par être en défaut. J'en conclus que x n'est ni rationnelle, ni même exprimable par des irrationnelles algébriques.

On arrivera facilement à une conclusion semblable pour la série beaucoup plus générale

$$x = \frac{k_1}{l} + \frac{k_2}{l^{1,2}} + \frac{k_3}{l^{1,2,3}} + \dots + \frac{k_m}{l^{1,2,\dots,m}} + \dots,$$

$k_1, k_2, k_3, \dots, k_m, \dots$ désignant des nombres entiers, positifs ou négatifs, dont la valeur absolue ne dépasse pas un certain maximum k . En prenant donc $l = 10$, et k_1, k_2, \dots , à volonté, de 0 à 9, on formera des fractions décimales indéfinies dont la valeur ne pourra jamais s'exprimer algébriquement. Je crois me souvenir qu'on trouve un théorème de ce genre, énoncé dans une lettre de Goldbach à Euler; mais je ne sache pas que la démonstration en ait jamais été donnée.

Maintenant posons

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^2} + \frac{1}{l^3} + \dots + \frac{1}{l^m} + \dots$$

En prenant toujours pour valeur approchée de x la somme des m premiers termes de la série, nous aurons

$$q = l^m$$

et

$$x - \frac{p}{q} = \frac{1}{l^{(m+1)^2}} + \dots < \frac{2}{l^{2m+1} \cdot q}.$$

Cette dernière quantité, renfermant au dénominateur le produit de q par l^{2m+1} qui grandit avec m , finira par décroître plus rapidement que $\frac{1}{\Lambda q}$. Mais tout ce qu'on peut conclure de là, c'est que x n'est pas rationnelle.

Comme nouvel exemple, soit

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^2} + \frac{1}{l^3} + \dots + \frac{1}{l^{m-1}} + \dots,$$

l étant un entier, et chaque terme ayant pour dénominateur la

$(n + 1)^{\text{ième}}$ puissance du dénominateur précédent, de sorte que

$$l_m = l_{m-1}^{n+1}.$$

Il est clair que l_{m-1} sera une puissance de l : par suite, on pourra prendre

$$q = l_{m-1}$$

et

$$x - \frac{p}{q} = \frac{1}{l_m} + \dots < \frac{2}{q^{n+1}}.$$

Donc x ne sera racine d'aucune équation algébrique de degré égal ou inférieur à n .

On aurait encore d'autres exemples, en considérant la série

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_1 l_2} + \dots + \frac{1}{l_1 l_2 \dots l_{m-1}} + \dots,$$

où $l, l_1, l_2, \dots, l_{m-1}, \dots$ désignent des nombres entiers de plus en plus grands. Cette circonstance que l_m croît au delà de toute limite suffit d'abord pour que x ne puisse être rationnelle. Et si l_m croît assez rapidement avec l'indice m , on sera certain que x n'est pas même une irrationnelle algébrique.

5. Observons en terminant que, si l'on voulait supposer a, b, \dots, g, h imaginaires et entiers complexes, c'est-à-dire de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α et β étant des entiers réels, puis tendre vers une racine imaginaire x de l'équation

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + gx + h = 0,$$

à l'aide de fractions $\frac{p}{q}$ dont les deux termes seraient aussi des entiers complexes, on retrouverait encore l'équation

$$\frac{p}{q} - x = \frac{f(p, q)}{q^n \cdot a \left(\frac{p}{q} - x_1\right) \dots \left(\frac{p}{q} - x_{n-1}\right)},$$

et en substituant aux imaginaires leurs modules, on en déduirait

facilement

$$\text{mod. } \left(\frac{p}{q} - x \right) > \frac{1}{A (\text{mod. } q)^n},$$

ce qui permet d'étendre aux imaginaires les résultats que nous venons de développer pour des quantités réelles. On reconnaît ainsi, par exemple, que, quel que soit l'entier complexe l , la somme de la série

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l^{1,2}} + \frac{1}{l^{1,2,3}} + \dots + \frac{1}{l^{1,2,3,\dots,n}} + \dots,$$

n'est jamais exprimable algébriquement.

